SRP øvelser - 24. februar 2022

Differentialligninger

Opgave 1

Lambert-Beers lov er givet som en første ordens lineær differentialligning:

$$\frac{dI(x)}{dx} = -\mu(x)I(x), \tag{1}$$

med grænsebetingelser

$$\begin{aligned} &I(x_0) = I_0 \\ &\mu(x \leq x_0) = 0 \\ &\mu(x \geq x_L) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Løs differentialligningen for $I(x)$.
Hint: Panserformel eller separation af de variable.

Flere spørgsmål du kan tænke over:

- Hvad er den fysiske forklaring på grænsebetingelserne?
- Kan du skrive løsningen op sådan, at den er på samme form som radontransformationen?
- Hvilken parameter måler vi under en CT scanning, og hvad kommer der ud af radontransformationen? Kan vi regne den ene ud fra den anden?

Parameterfremstilling

I opgaverne nedenfor vil vi bestemme parameterfremstillinger i både kartesiske og polære koordinater for linjen

$$\ell : \quad y = -\frac{1}{2}x + 3. \tag{3}$$

Linjen er plottet i figur 1.

Opgave 2

Brug linjens ligning (3) til at opskrive en parameterfremstilling for ℓ i kartesiske koordinater.

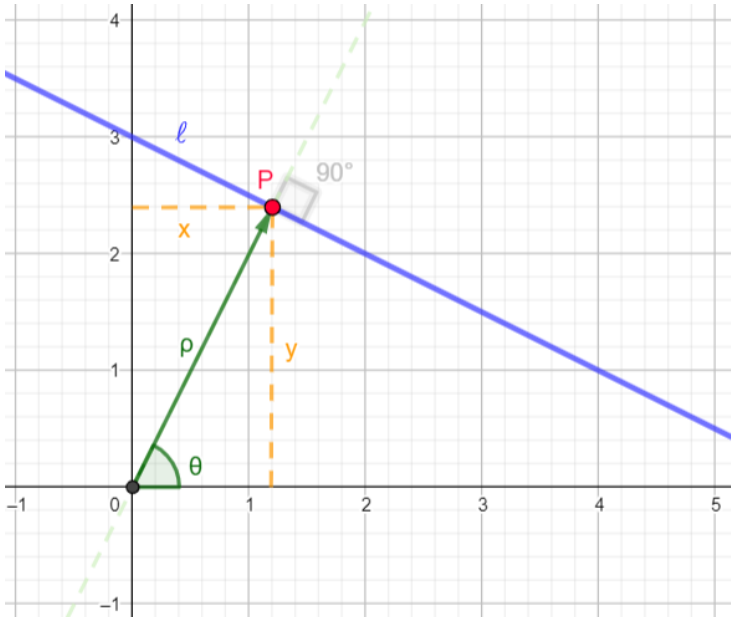

Figure 1: En linje ℓ (blå) og et punkt på linjen P (rød), der er defineret enten ved kartesiske koordinater (orange) eller polære koordinater (grøn).

Opgave 3

Hvad er punktet P i kartesiske koordinater?
Hint: Hvad er skæringspunktet mellem ℓ og en linje der går langs ℓ's normalvektor $\hat{\mathbf{n}}$ og gennem origo?

Opgave 4

Hvad er punktet P i polære koordinater?

Opgave 5

Angiv parameterfremstillingen for ℓ i polære koordinater.
Hint: $\sin(\tan^{-1}(z)) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$ og $\cos(\tan^{-1}(z)) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

Linjeintegrale

Vi betragter et domæne, hvor et objekt med absorptionskoefficient er defineret:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{4}$$

Opgave 6

Skitser domænet angivet i ligning (4).

Opgave 7

Udregn linjeintegralet

$$\int_\ell \mu(x,y)\,dt \tag{5}$$

hvor ℓ er linjen fra parameterfremstillingsopgaverne og $\mu(x,y)$ er givet i (4).
Hint 1: Prøv at tegn det hele op sammen og find en geometrisk løsning.
Hint 2: Brug ligningen for integralet af en parameteriseret kurve. Udregn grænserne a og b ved at indsætte parameterfremstillingen i polære koordinater for ℓ i (4).

Bonus: Opgave 8

Vi betragter et domæne, hvor et objekt med absorptionskoefficient er defineret:

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{for } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \tag{6}$$

Beregn projektionen $\mathbf{p}_0(\rho)$, der er projektionen ved vinkel $\theta = 0$.
Hint: Skriv parameterfremstillingen for linjerne $\ell_{\rho,0}$ op i polære koordinater uden at indsætte nogle værdier på ρ's plads. Beregn linjeintegralet gennem $\mu(x,y)$ på samme måde som i opgave 7.

Hvad er projektionen $\mathbf{p}_\pi(\rho)$? (Tænk på symmetri!)

Kan du skrive radontransformationen af $\mu(x,y)$ op?

Sinogrammer

Opgave 9

I figur 2 ser vi to punkter i et domæne og et tilsvarende sinogram. Kan du skelne hvilket punkt, der hører til hvilken kurve?

Opgave 10

Hvorfor er sinogrammet i figur 2 kun givet fra 0 til π? Hvordan ser sinogrammet fra π til 2π ud? Giver det os yderligere information?

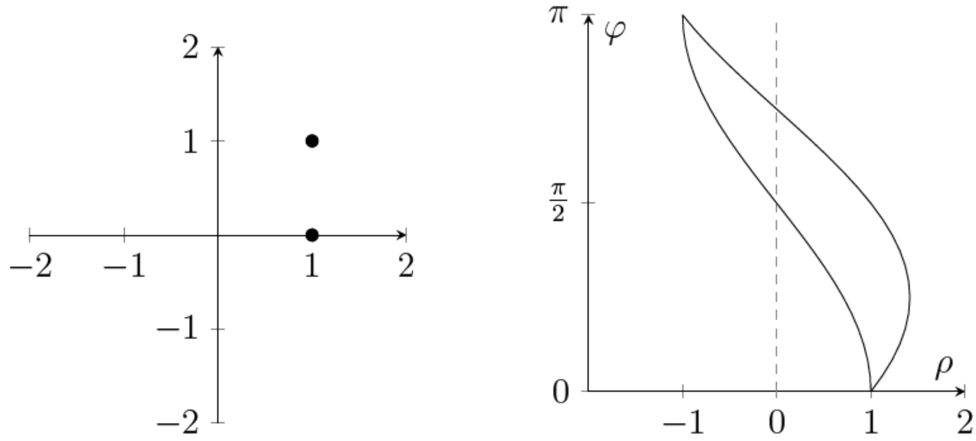

Figure 2: Til venstre ser vi to punkter i et domæne, hvor det antages at værdien i punkterne er 1. Til højre ser vi radontransformationen af domænet som svarer til sinogrammet.