Opgaver

Polære koordinater

Opgave 1

Opskriv følgende vinkler i radianer $180°, 90°, 135°, 270°, 60°, -30°$.

Opgave 2

Bestem $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

Opgave 3

Et punkt p i xy-planen er givet ved de kartesiske koordinater $(3, 4)$. Bestem p's polære koordinater.

Opgave 4

Bestem $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{5}\right)$.

Opgave 5

I et xy-planen er givet linien ℓ, der går igennem punktet $(2, 1)$ med hældningen -1, se figur 1. Bestem liniens ligning for ℓ og bestem de polære koordinater ρ og θ for linien.

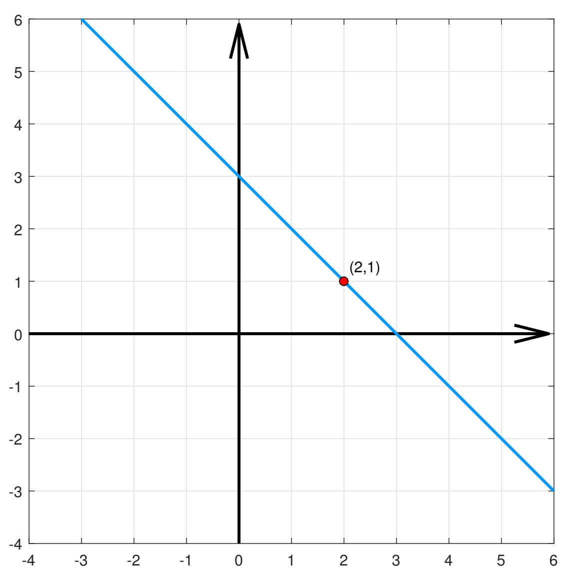

Figure 1:

Parameterfremstillinger

Opgave 6

Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}_x(t) = (x(t), y(t))$ for x-aksen.

Opgave 7

Bestem en parameterfremstilling $\mathbf{r}_\ell(t) = (x(t), y(t))$ for linien ℓ fra opgave 5.

Opgave 8

Bestem en parameterfremstilling for enhedscirklen.

Opgave 9

Bestem en parameterfremstilling for cirklen beskrevet ved $(x-3)^2+(y-4)^2 = 5^2$.

Opgave 10

En ellipse kan beskrives med ligningen $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, hvor a og b er længden af lille- og storhalvaksen. Bestem en parameterfremstilling for ellipsen beskrevet ved $\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.

Opgave 11 (Ekstra)

Et hjul med radius 1 og centrum i $(0, 1)$ er givet. Punktet p er punktet på hjulet hvor det rører x-aksen. Hjulet gives et skub så det triller ned langs x-aksen. Bestem en parameterfremstilling for kurven p følger. Se figur 2, sådan en kurve kaldes en cykloid.

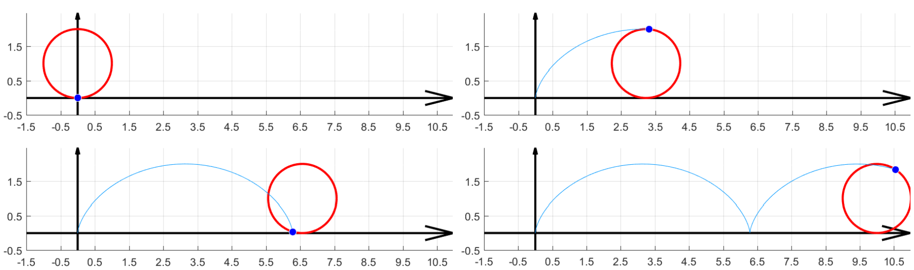

Figure 2:

Profilkurver

Opgave 12

Et cirkelobjekt er beskrevet ved funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x^2 + y^2 < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Tegn et xy-koordinatsystem og indtegn f.
2. Du observerer funktionen fra syd. Tegn profilkurven set fra denne retning og bestem funktionen for kurven: $p_{270^\circ}(\rho)$.
3. Du observerer nu funktionen fra vest. Tegn profilkurven set fra denne retning og bestem $p_{180^\circ}(\rho)$.

Opgave 13

Et kvadratisk objekt er beskrevet ved funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } -1 < x < 1 \text{ og } -1 < y < 1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

1. Tegn et xy-koordinatsystem og indtegn f.
2. Du observerer funktionen fra syd. Tegn profilkurven set fra denne retning og bestem funktionen for kurven: $p_{270^\circ}(\rho)$.
3. Du observerer nu funktionen fra sydvest. Tegn profilkurven set fra denne retning og bestem $p_{225^\circ}(\rho)$.

Opgave 14

I figure 3 ses 4 objekter. Tegn for hver af dem profilkurverne fra retningerne A, B, C og D.

Kurveintegraler

Opgave 15

Givet $f(x,y) = x^2$ på området $\Omega = [-4,6] \times [-4,6] \subset \mathbb{R}^2$ (det er den del af xy-planen vi kan se i figure 1). Bestem $\int_\ell f(x,y)\,ds$ i området Ω, hvor ℓ er linien fra opgave 5. Se figur 4 (venstre). (vink #1: Du har allerede bestemt en parameterfremstilling for ℓ i opgave 7. Tjek at $\|\mathbf{r}'_\ell(t)\| = 1$) (vink #2: Bestem grænserne for t, så $\mathbf{r}_t(t)$ bliver indenfor Ω) (vink #3: Indsæt din parameterfremstilling ind i $f(x,y)$)

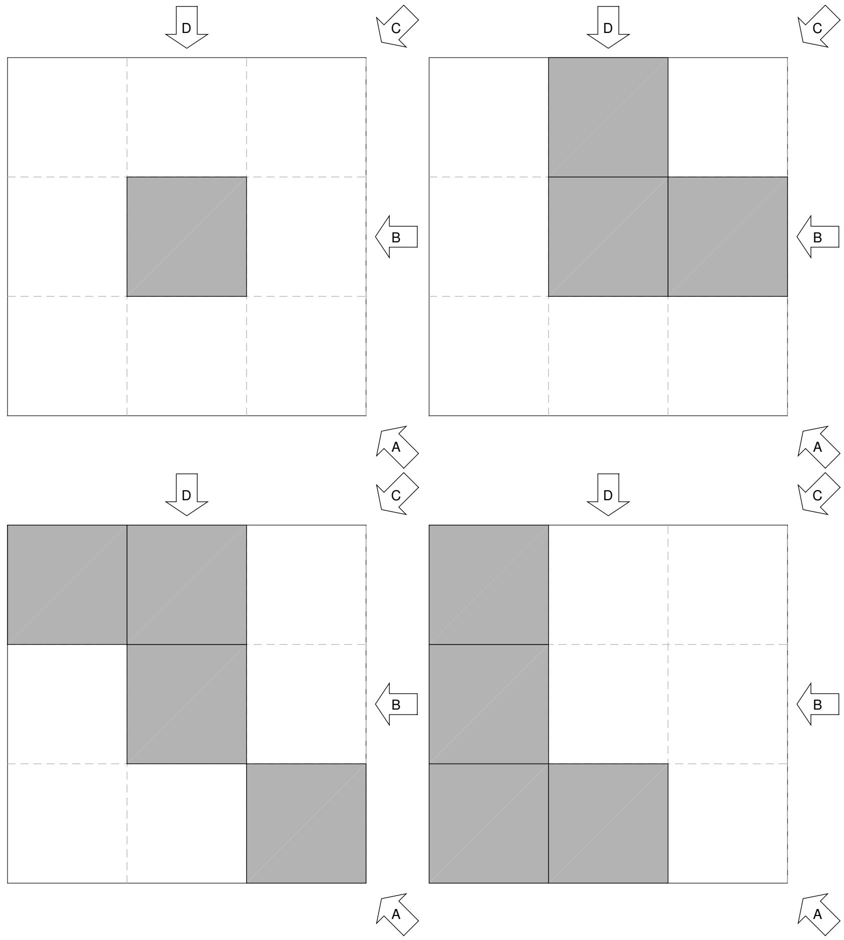

Figure 3:

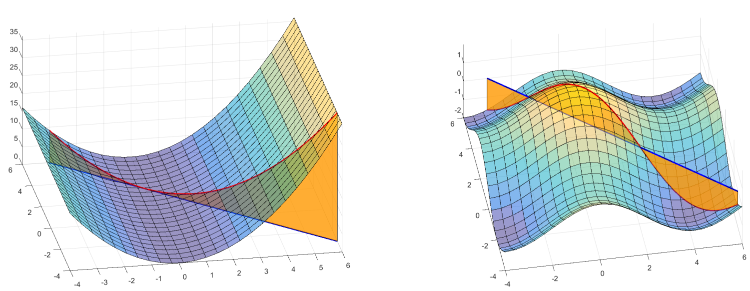

Figure 4:

Opgave 16

Løs opave 15 igen, men med

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{4}\right).$$

Se figur 4 (højre).

Opgave 17 (Ekstra)

Vi ser igen på cykloiden fra opgave 11. Bestem længden af en af buerne på kurven. Hint: $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$.

Rekonstruktion

Du skal i denne del af opgaverne kigge lidt på rekonstruktion. Du vil blive giver nogle profilkurver og skal så rekonstruere det oprindelige billede. Vi bruger at vi ved at billedet er 3x3 pixels og hver pixel kan enten være 1 eller 0. Du vil se at der ikke altid kun er en løsning, hvis man har for få vinkler, selv for så simple problemer som dem vi har her. Således ka du nok forestille dig at det bliver meget værre, når man vil rekonstruere større billeder.

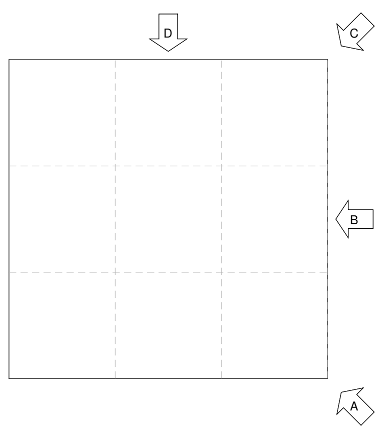

Figure 5:

Opgave 18

En ukendt figur som i opgave 14 er givet. Profilkurverne for figuren fra retningerne B og D kan ses i figur 6. Bestem alle løsninger.

Opgave 19

En ukendt figur som i opgave 14 er givet. Profilkurverne for figuren fra retningerne B og D kan ses i figur 7. Bestem alle løsninger.

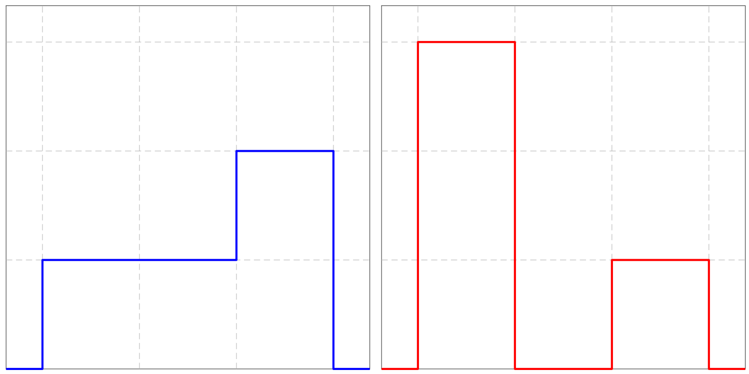

Figure 6: Profilkurver. B til venstre, D til højre.

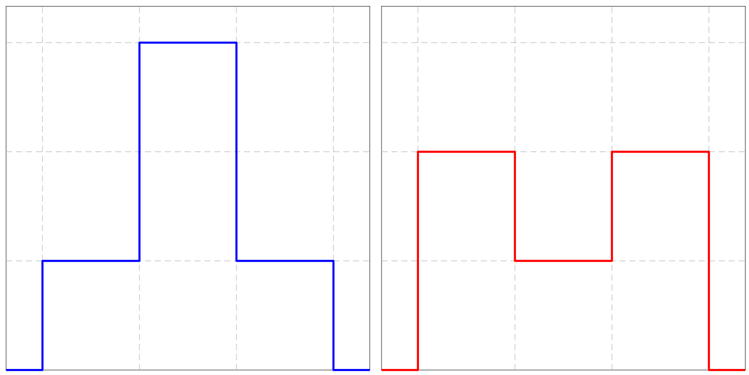

Figure 7: Profilkurver. B til venstre, D til højre.

Opgave 20

En ukendt figur som i opgave 14 er givet. Profilkurverne for figuren fra retningerne B og D kan ses i figur 8. Bestem alle løsninger.

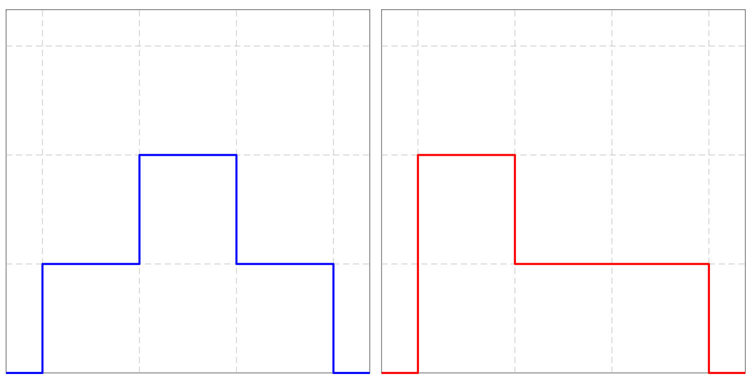

Figure 8: Profilkurver. B til venstre, D til højre.

Løsninger

Opgave 1

$\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$

Opgave 2

-1

Opgave 3

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
$\theta = \tan^{-1}(\frac{4}{3}) = 0.9273$

Opgave 4

$\frac{11\pi}{5} = \frac{\pi}{5} + 2\pi$
$\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$
dvs.
$\cos^2(\frac{\pi}{2}) + \sin^2(\frac{11\pi}{5}) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) + \sin^2(\frac{\pi}{5} + 2\pi) = \cos^2(\frac{\pi}{5}) + \sin^2(\frac{\pi}{5}) = 1$

Opgave 5

$\mathbf{n} = (1, 1)$
$P = (2, 1)$
$(x - 2) + (y - 1) = 0$
$x + y = 3$
$\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
$x \cos\frac{\pi}{4} + y \sin\frac{\pi}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$
$\rho = \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

Opgave 6

$x(t) = t \qquad y(t) = 0$

Opgave 7

$x(t) = \frac{3}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}$
$y(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}$

Opgave 8

$x(t) = \cos t \quad y(t) = \sin t$

Opgave 9

$x(t) = 5\cos t + 3 \quad y(t) = 5\sin t + 4$

Opgave 10

$x(t) = 2\cos t + 1 \quad y(t) = 3\sin t$

Opgave 11

$x(t) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) + t = t - \sin t$
$y(t) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right) + 1 = 1 - \cos t$

Opgave 12

$$p_{270^\circ}(\rho) = p_{180^\circ}(\rho) = \begin{cases} 2\sqrt{1-\rho^2} & \text{hvis } -1 < \rho < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Opgave 13

$$p_{270^\circ}(\rho) = \begin{cases} 2 & \text{hvis } -1 < \rho < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

$$p_{225^\circ}(\rho) = \begin{cases} 2(\sqrt{2} - \sqrt{2}|\rho|) & \text{hvis } -1 < \rho < 1 \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Opgave 14

...

Opgave 15

$t_0 = -\frac{9}{\sqrt{2}} \qquad t_1 = \frac{9}{\sqrt{2}}$
$f(x(t), y(t)) = (\frac{3}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}})^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{\sqrt{2}} + \frac{9}{4}$
$\int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} f(x(t), y(t))\, dt = \int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} \frac{t^2}{2} - \frac{3t}{\sqrt{2}} + \frac{9}{4}\, dt = \left[\frac{t^3}{6} - \frac{3t^2}{2\sqrt{2}} + \frac{9}{4}t\right]_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 81\sqrt{2}$

Opgave 16

$$f(x(t), y(t)) = \cos\left(\frac{\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi\left(\frac{3}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{4}\right)$$

$$\int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} f(x(t), y(t))\, dt = \int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\pi\left(\frac{3}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi\left(\frac{3}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)}{4}\right) dt$$

$$= \int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right) dt = \left[-\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right) - \frac{4\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right)\right]_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}}$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left[\sin\left(\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi t}{4\sqrt{2}}\right)\right]_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi(-\frac{9}{\sqrt{2}})}{4\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi(\frac{9}{\sqrt{2}})}{4\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = -\frac{6\pi}{8} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi(-\frac{9}{\sqrt{2}})}{4\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8} - \frac{9\pi}{8} = -\frac{6\pi}{8} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi(\frac{9}{\sqrt{2}})}{4\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8} + \frac{9\pi}{8} = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

$$\int_{-\frac{9}{\sqrt{2}}}^{\frac{9}{\sqrt{2}}} f(x(t), y(t))\, dt = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - (-1) - (-\frac{1}{\sqrt{2}})\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

Opgave 17

$$L = \int_{\mathbf{r}_{\text{cykloid}}} ds = \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'_{\text{cykloid}}(t)\|\, dt$$

$$\|\mathbf{r}'_{\text{cykloid}}(t)\| = \sqrt{2(1-\cos(t))}$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))} = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8$$

Opgave 18

Se figur 9.

Opgave 19

Se figur 10.

Opgave 20

Se figur 11.

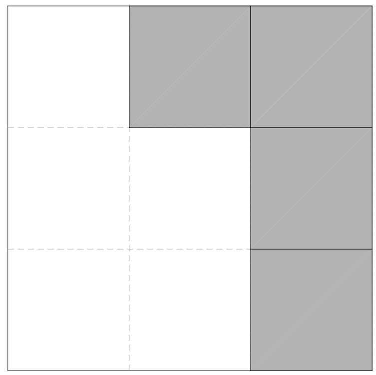

Figure 9: Løsning til opgave 18

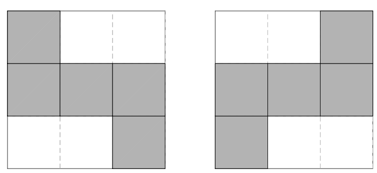

Figure 10: Løsninger til opgave 19

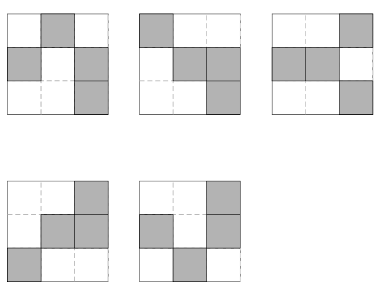

Figure 11: Løsninger til opgave 20